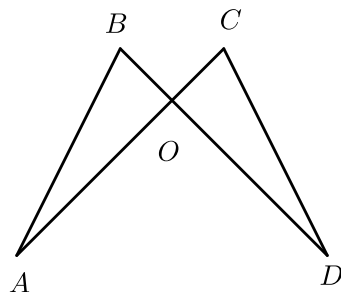


第3讲全等三角形基本辅助线（练习）

一、连接

练习

1. 如图所示， AC 与 BD 相交于点 O ， $AC = DB$ ， $AB = DC$ ，求证： $\angle B = \angle C$ 。



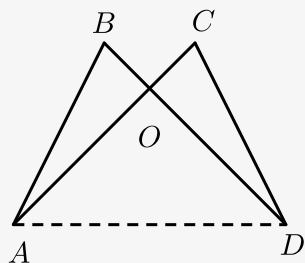
【答案】证明见解析。

【解析】连接

AD

，

在



$\triangle ADB$ 和 $\triangle DAC$ 中，

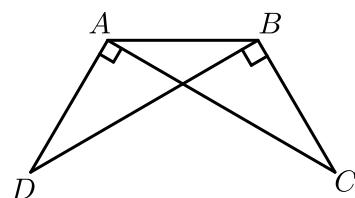
$$\begin{cases} AB = DC \\ AD = DA, \\ DB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle DAC$ (SSS) .

$\therefore \angle B = \angle C$.

【标注】【知识点】SSS

2. 如图，已知 $AC = BD$ ， $AD \perp AC$ ， $BC \perp BD$ ，求证： $AD = BC$ 。



【答案】证明见解析 .

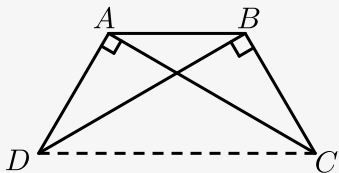
【解析】连结 CD

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 和 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中

$$\begin{cases} AC = BD \\ DC = CD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle BCD$

$\therefore AD = BC$.

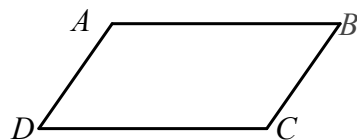


【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】HL

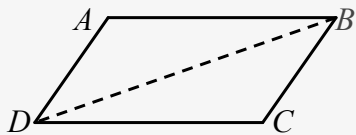
练习

3. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, $AB \parallel CD$. 求证: $AD = BC$.



【答案】证明见解析 .

【解析】方法一: 连接 BD ,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABD = \angle CDB$,

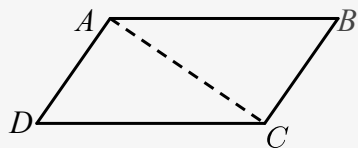
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle ABD = \angle CDB \\ BD = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB$ (SAS) ,

$\therefore AD = CB$.

方法二：如图，连接 AC ，



$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle ACD$ ，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle BAC = \angle DCA \\ AC = CA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA (\text{SAS})$ ，

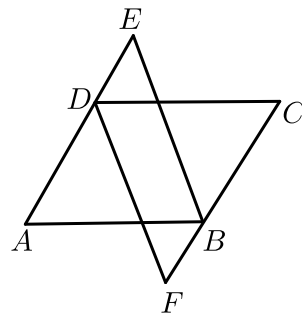
$\therefore AD = CB$ 。

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】SAS

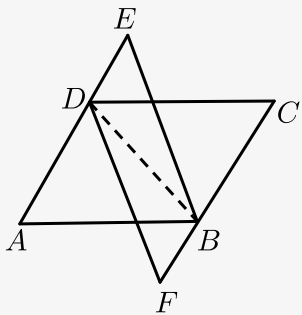
【知识点】全等三角形的性质

4. 如图， $AB = DC$ ， $AD = BC$ ， $DE = BF$ ，求证： $BE = DF$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】



连接 BD ，

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中

$$\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC, \\ BD = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB (\text{SSS})$,

$\therefore \angle A = \angle C$,

$\therefore AD = BD, DE = BF$,

$\therefore AE = CF$,

在 $\triangle EAB$ 和 $\triangle FCD$ 中

$$\begin{cases} AF = CF \\ \angle A = \angle C, \\ AB = CD \end{cases}$$

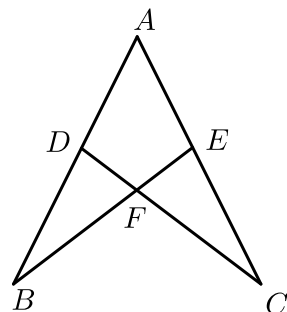
$\therefore \triangle EAB \cong \triangle FCD (\text{SAS})$

$\therefore BE = DF$.

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

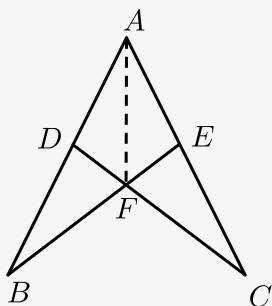
练习

5. 如图所示，已知 $AD = AE$ ， $DF = EF$. 求证： $AB = AC$.



【答案】证明见解析.

【解析】连接 AF ,



在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle AEF$ 中，

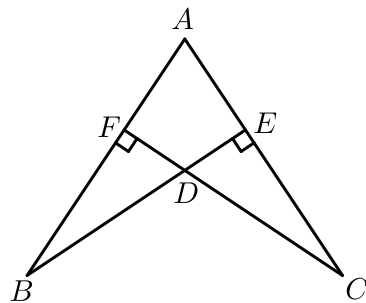
$$\begin{cases} AD = AE \\ DF = EF, \\ AF = AF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle AEF (SSS)$,
 $\therefore \angle ADF = \angle AEF$.
 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AEB$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle DAC = \angle EAB \\ AD = AE \\ \angle ADC = \angle AEB \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB (ASA)$,
 $\therefore AC = AB$.

【标注】【知识点】SSS

6. 如图, 已知 $BE \perp AC$, 垂足为 E , $CF \perp AB$, 垂足为 F , BE 与 CF 相交于点 D , 且 $BD = CD$. 求证: $AE = AF$.



【答案】证明见解析.

【解析】连接 AD ,

$\because BE \perp AC, CF \perp AB$,

$\therefore$

$\angle CED = \angle BFD = 90^\circ$

,

$\angle AFC = \angle AEB = 90^\circ$

.

$\therefore \triangle BDF$ 与 $\triangle CDE$ 中,

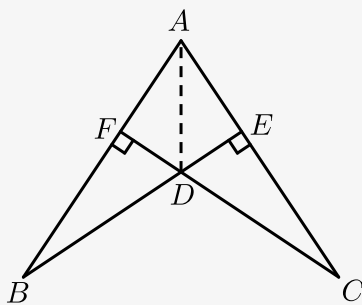
$$\begin{cases} \angle BDF = \angle CDE \\ BD = CD \\ \angle BFD = \angle CED \end{cases}$$
 ,

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDE (AAS)$.

$\therefore DF = DE, BD = CD, \angle B = \angle C$.

$\therefore BE = CF$.

$\therefore$ 在 $\triangle AFC$ 与 $\triangle AEB$ 中,



$$\begin{cases} \angle FAC = \angle EAB \\ \angle C = \angle B \\ CF = BE \end{cases},$$

则 $\triangle AFC \cong \triangle AEB$ (AAS) .

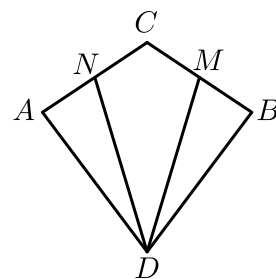
$\therefore AE = AF$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】全等三角形的对应边与角

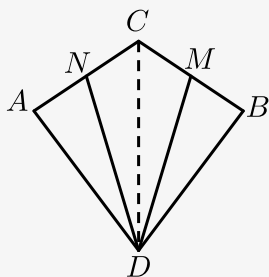
【知识点】AAS

7. 如图，已知 $CA = CB$ ， $AD = BD$ ， M ， N 分别是 CB ， CA 的中点，求证： $DN = DM$.



【答案】证明见解析 .

【解析】连接 CD ，



在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CBD$ 中，

$$\begin{cases} CA = CB \\ AD = BD, \\ CD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle CAD \cong \triangle CBD$ (SSS) ,

$\therefore \angle A = \angle B$,

$\because CA = CB$ ， M ， N 分别是 CB ， CA 的中点，

$\therefore AN = BM$,

在 $\triangle AND$ 和 $\triangle BMD$ 中，

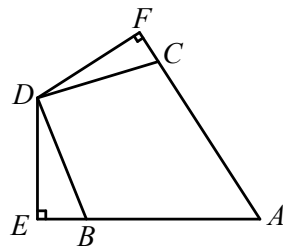
$$\begin{cases} AN = BM \\ \angle A = \angle B, \\ AD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AND \cong \triangle BMD$ (SAS) ,

$$\therefore DN = DM .$$

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

8. 已知，如图所示， $AB = AC$ ， $BD = CD$ ， $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F ，求证：
 $DE = DF$.



【答案】证明见解析 .

【解析】连接 AD ，

在 $\triangle ACD$ 和

$\triangle ABD$ 中，

$$\begin{cases} AC = AB \\ CD = BD \\ AD = AD \end{cases}$$

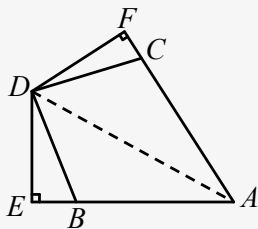
$$\therefore \triangle ACD \cong$$

$$\triangle ABD \text{ (SSS) ,}$$

$$\therefore \angle EAD = \angle FAD , \text{ 即 } AD \text{ 平分 } \angle EAF ,$$

$$\therefore DE \perp AE , DF \perp AF ,$$

$$\therefore DE = DF .$$

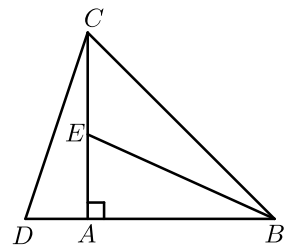


【标注】【知识点】SSS

二、 延长

练习

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB \perp AC$ ，且 $AB = AC$ ，点 E 在 AC 上，点 D 在 BA 的延长线上， $AD = AE$. 猜想 BE 和 CD 存在怎样的位置关系？试说明理由 .



【答案】 $BE \perp CD$.

【解析】 $BE \perp CD$, 理由如下 :

$$\because AB \perp AC$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EAB$$

在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle AEB$ 中

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle DAC = \angle EAB \\ AC = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB \text{ (SAS)}$$

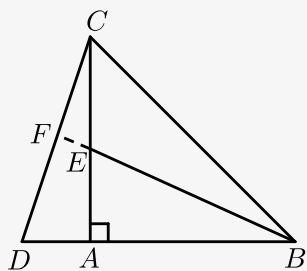
$$\therefore \angle DCA = \angle EBA$$

延长 BE 交线段 CD 于点 F , 如图所示

$$\therefore \angle DCA + \angle D = \angle FBA + \angle D = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BFD = 90^\circ , \text{ 即 } BE \perp CD .$$

故答案为 : $BE \perp CD$.

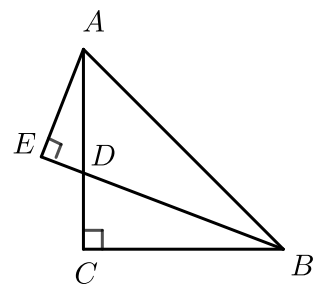


【标注】 【知识点】 全等三角形的性质

【知识点】 SAS

【知识点】 垂线的性质

10. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AC 上一点, 且 AE 垂直 BD 的延长线于 E , $AE = \frac{1}{2}BD$, 求证 : BD 是 $\angle ABC$ 的平分线 .



【答案】证明见解析 .

【解析】如图所示，延长 AE 和 BC 相交于点 F ，

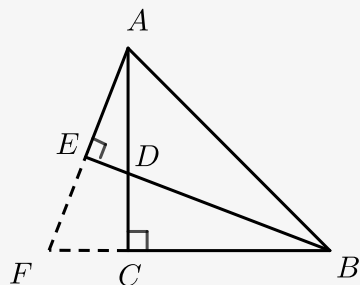
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CBD + \angle CDB = 90^\circ .$$

$$\therefore BE \perp AE ,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ .$$

$\therefore$



$$\angle EAD + \angle ADE = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle EAD + \angle ADE = \angle CBD + \angle BDC .$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BDC ,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle CBD .$$

在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases} \angle FAC = \angle DBC \\ AC = BC \\ \angle ACF = \angle BCD \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD \text{ (ASA)} .$$

$$\therefore AF = BD .$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2} BD ,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AF .$$

$$\therefore AE = EF .$$

在 $\triangle BEA$ 和 $\triangle BEF$ 中，

$$\begin{cases} AE = FE \\ \angle AEB = \angle FEB = 90^\circ , \\ BE = BE \end{cases}$$

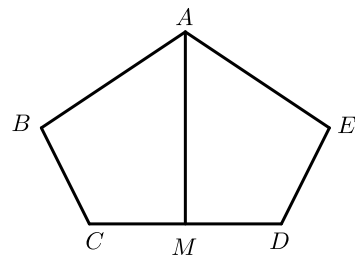
$$\therefore \triangle BEA \cong \triangle BEF \text{ (SAS)} .$$

$$\therefore \angle ABE = \angle FBE .$$

即 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线 .

【标注】【知识点】角平分线判定定理

11. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle D$, $BC = DE$, M 为 CD 中点 . 求证: $AM \perp CD$



【答案】 证明见解析 .

【解析】 方法一: 延长 AB , AE , 交直线 CD 于 F , G .

$$\therefore \angle ABC = \angle AED ,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle GED .$$

$$\therefore \angle BCM = \angle EDM ,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle EDG .$$

$\therefore$ 在 $\triangle BCF$ 与 $\triangle EDG$ 中

$$\begin{cases} \angle FBC = \angle GED \\ BC = ED \\ \angle BCF = \angle EDG \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle EDG \text{ (ASA)}$$

$$\therefore \angle F = \angle G . FC = GD ,$$

$$\therefore AG = AF ,$$

$$\therefore CM = MD ,$$

$$\therefore FM = MG ,$$

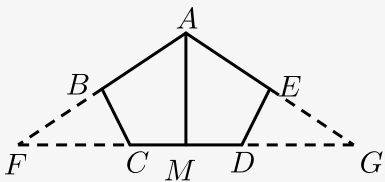
$\therefore$ 在 $\triangle AMF$ 与 $\triangle AMG$ 中

$$\begin{cases} AM = AM \\ FM = MG , \\ AF = AG \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle AMF \cong \triangle AMG \text{ (SSS)} ,$$

$$\therefore \angle AMF = \angle AMG = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ ,$$

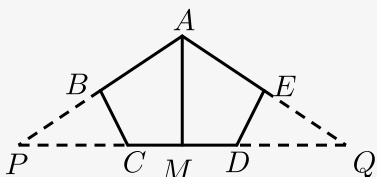
$$\therefore AM \perp CD .$$



方法二：延长 AB 交 DC 延长线于点 P ，延长 AE 交 CD 延长线于点 Q

,

由题意可知 $\angle PBC = \angle QED$ ， $\angle PCB = \angle QDE$ ，且 $BC = DE$ ，



则 $\triangle PBC \cong \triangle QED(ASA)$ ，

则 $\angle P = \angle Q$ ， $PC = QD$ ，

由 M 为 CD 的中点，

则 $CM = DM$ ，

$\therefore PM = MQ$ ，

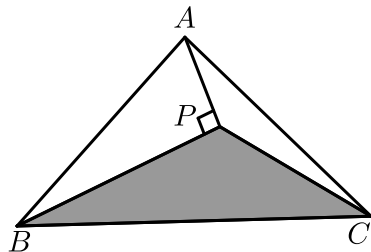
所以 $\triangle APM \cong \triangle AQM(SAS)$ ，

则 $AM \perp CD$ 。

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

练习

12. 如图， $\triangle ABC$ 的面积为 8cm^2 ， AP 垂直 $\angle B$ 的平分线 BP 于点 P ，则 $\triangle PBC$ 的面积是（ ） cm^2 。



A. 3

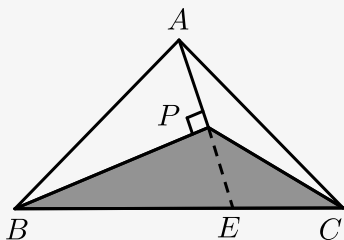
B. 4

C. 5

D. 6

【答案】 B

【解析】 延长 AP 交 BC 于 E ，



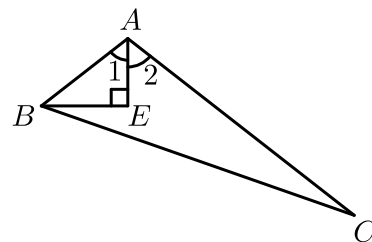
$\therefore AP$ 垂直 $\angle B$ 的平分线 BP 于 P ,
 $\therefore \angle ABP = \angle EBP$, $\angle APB = \angle EPB = 90^\circ$,
 在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle EBP$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle APB = \angle BPE = 90^\circ \\ BP = BP \\ \angle ABP = \angle EBP \end{cases} ,$$

 $\therefore \triangle ABP \cong \triangle EBP (ASA)$,
 $\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BEP}$, $AP = PE$,
 $\therefore \triangle APC$ 和 $\triangle CPE$ 等底同高 ,
 $\therefore S_{\triangle APC} = S_{\triangle PCE}$,
 $\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PBE} + S_{\triangle PCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 4\text{cm}^2$.
 故选B .

【标注】【知识点】构造简单辅助线证明全等

13. 如图 , 已知在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle ABC = 3\angle C$, $\angle 1 = \angle 2$, $BE \perp AE$. 求证 : $AC - AB = 2BE$.



【答案】证明见解析 .

【解析】延长 BE 交 AC 于 M .

$\therefore AE \perp BE$,
 $\therefore \angle AEB = \angle AEM = 90^\circ$.
 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AEM$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AEM \\ AE = AE \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases} ,$$

 $\therefore \triangle AEB \cong \triangle AEM$,
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$, $AB = AM$, $BE = EM$,

$\therefore AD = AC$,
 $\therefore CG = DE$,
 在 $\triangle CFG$ 和 $\triangle DFE$ 中 ,

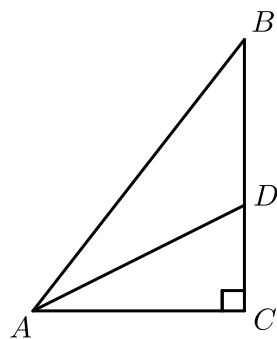
$$\begin{cases} CG = DE \\ \angle CGF = \angle DEF , \\ GF = EF \end{cases}$$
 $\therefore \triangle CEG \cong \triangle DFE(\text{SAS})$,
 $\therefore \angle 4 = \angle 5$,
 $\therefore \angle 3 + \angle CFD = 180^\circ$,
 $\therefore \angle 4 + \angle FCB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CFD + \angle FCB = 270^\circ - (\angle 3 + \angle 4)$,
 $\therefore \angle 3 + \angle 5 = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CFD + \angle FCB = 270^\circ - (\angle 3 + \angle 5) = 180^\circ$,
 $\therefore FD \parallel CB$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

三、做垂直

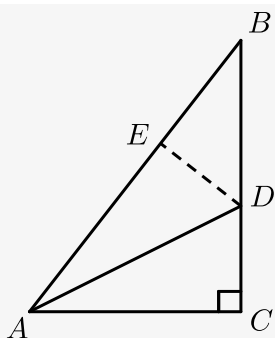
练习

15. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $AB = 5$ ， $CD = 2$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积是_____。



【答案】5

【解析】如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，



$\because \angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$,

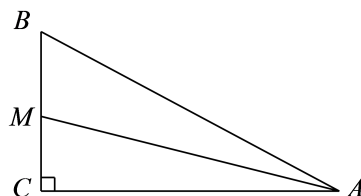
$\therefore DE = CD = 2$,

$\therefore \triangle ABD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$.

故答案为: 5.

【标注】【知识点】角分线性定理

16. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AM 平分 $\angle CAB$, $BC = 16\text{cm}$, $CM : MB = 3 : 5$, 则点 M 到 AB 的距离是 _____ cm .



【答案】6cm

【解析】过 M 作 $MD \perp AB$ 于 D ,

$\because BC = 16\text{cm}$,

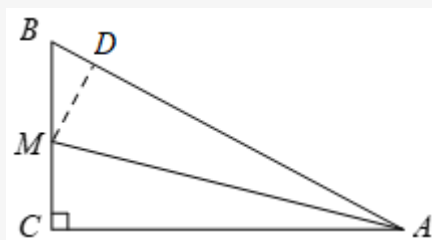
$CM : MB = 3 : 5$,

$\therefore$

$CM = \frac{3}{3+5} \times 16 = 6\text{cm}$,

$\because \angle C = 90^\circ$, AM 平分 $\angle CAB$,

$\therefore DM = CM = 6\text{cm}$, 即 M 到 AB 的距离是 6cm.

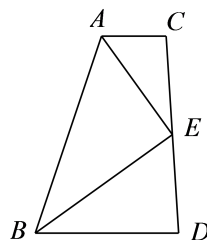


【标注】【知识点】垂直构对称

练习

17. 如图, $AC \parallel BD$, AE , BE 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle DBA$, 点 E 在 CD 上.

求证： $AB = AC + BD$.



【答案】证明见解析 .

【解析】在 AB 上截取 $AF = AC$, 连接 EF ,

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle FAE$ 中 ,

$$\begin{cases} AC = AF \\ \angle CAE = \angle FAE , \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle FAE$ (SAS) ,

则 $\angle CEA = \angle FEA$,

又 $\angle CEA + \angle BED = \angle FEA + \angle FEB = 90^\circ$,

$\therefore \angle FEB = \angle DEB$,

$\therefore BE$ 平分 $\angle DBA$,

$\therefore \angle DBE = \angle FBE$,

在 $\triangle DEB$ 和 $\triangle FEB$ 中 ,

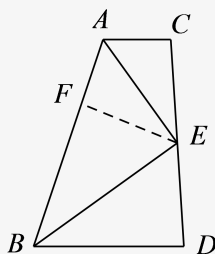
$$\begin{cases} \angle DEB = \angle FEB \\ EB = EB \\ \angle DBE = \angle FBE \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEB \cong \triangle FEB$ (ASA) ,

$\therefore BD = BF$,

又 $\because AF = AC$,

$\therefore AB = AF + FB = AC + BD$.

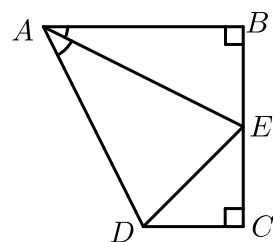


【标注】【知识点】截长补短

18. 如图 , 点 E 是 BC 的中点 , $AB \perp BC$, $DC \perp BC$, AE 平分 $\angle BAD$, 下列结论 :

① $\angle AED = 90^\circ$; ② $\angle ADE = \angle CDE$; ③ $DE = BE$; ④ $AD = AB + CD$.

四个结论中成立的是 () .



A. ①②④

B. ①②③

C. ②③④

D. ①③

【答案】 A

【解析】 过E作 $EF \perp AD$ 于F，如图，

$\because AB \perp BC$ ，AE平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle AFE = \angle B = 90^\circ$ ， $\angle FAE = \angle BAE$ ，

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle AFE = \angle B \\ \angle FAE = \angle BAE \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle AEB (\text{AAS})$ ，

$\therefore BE = EF$ ， $AB = AF$ ， $\angle AEF = \angle AEB$ ；

又 $\because$ 点E是BC的中点，

$\therefore EC = EF = BE$ ，

又 $\because DE > CE$ ，

$\therefore DE > BE$ ，所以③不正确．

在 $\text{Rt}\triangle EFD$ 和 $\text{Rt}\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} EF = EC \\ DE = DE \end{cases}$$

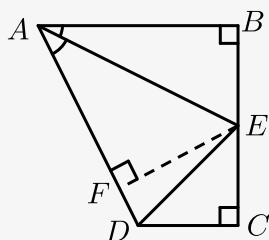
$\therefore \text{Rt}\triangle EFD \cong \text{Rt}\triangle ECD (\text{HL})$ ，

$\therefore DF = DC$ ， $\angle FED = \angle CED$ ， $\angle FDE = \angle CDE$ ，所以②正确；

$\therefore \angle AED = \angle AEF + \angle FED = \frac{1}{2} \angle BEC = 90^\circ$ ，所以①正确．

$AD = AF + FD = AB + DC$ ，所以④正确；

故选A．



【标注】【知识点】垂直构对称